マルチレベルモデルを理解するために

データ（一部）

HOMEWORK	SCORE	CLASS
26.31	77.74	A
34.79	77.64	A
29.50	84.13	A
22.04	79.52	A
30.51	78.44	A
....		
43.50	39.53	B
52.91	55.17	B
46.19	41.19	B
49.21	41.73	B
45.17	46.83	B
....		
73.59	25.78	C
72.23	20.48	C
74.02	24.21	C
58.26	14.69	C
75.13	22.07	C
....		

1. データ全体で回帰分析

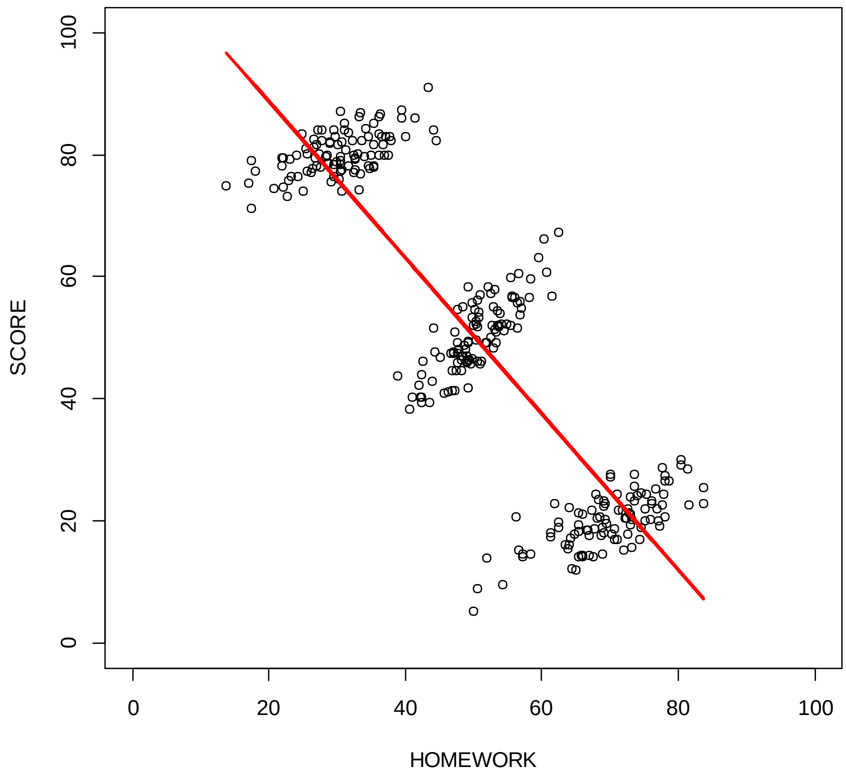
3 つのクラスのデータをまとめて回帰分析を行う。推定結果と、データおよび回帰直線をプロットしたものを以下に示す。

```
Call:
lm(formula = SCORE ~ HOMEWORK, data = dat)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-45.050  -6.895   0.985   7.687  32.925 

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept) 114.21197    2.19419   52.05   <2e-16 ***
HOMEWORK     -1.27795    0.04145  -30.83   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0  ‘***’  0.001  ‘**’  0.01  ‘*’  0.05  ‘.’  0.1  ‘ ’  1

Residual standard error: 12.28 on 298 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.7614,    Adjusted R-squared:  0.7606 
F-statistic: 950.7 on 1 and 298 DF,  p-value: < 2.2e-16
```



以上からわかるように、回帰直線の傾きはマイナスになっている。しかし、クラスごとの分布をみると、HOMEWORK の量が増えるほど SCORE が向上しているように見える。このように、集団レベルの分析と個人レベルの分析で全く異なる結果となり、変数の関係を見誤ることを「生態学的誤謬」という。ここでは、クラスごとにみれば右肩上がりの関係が、集団ごとに SCORE と HOMEWORK 量の位置が異なるため、全体として右肩下がりの関係に見えてしまっている。したがって、HOMEWORK と SCORE の関係を分析するためには、CLASS を統制して分析する必要がある。

2. データをクラスごとに分割して回帰分析

次に、単純にクラスごとにデータを分割して、それぞれについて回帰分析を実施。

A クラス

```
Call:
lm(formula = SCORE ~ HOMEWORK, data = datA)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-6.9737 -1.8717 -0.2867  2.2168  6.7805

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 69.74699    1.52641  45.693  < 2e-16 ***
HOMEWORK     0.34591    0.04938   7.005 3.14e-10 ***
---
Signif. codes:  0  ‘***’  0.001  ‘**’  0.01  ‘*’  0.05  ‘.’  0.1  ‘ ’  1

Residual standard error: 2.962 on 98 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.3336,    Adjusted R-squared:  0.3268
F-statistic: 49.07 on 1 and 98 DF,  p-value: 3.142e-10
```

B クラス

```
Call:
lm(formula = SCORE ~ HOMEWORK, data = datB)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-7.3808 -2.6200 -0.6505  2.3039  9.2949

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -0.88389    3.70323  -0.239    0.812
HOMEWORK     1.01595    0.07314  13.891   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0  ‘***’  0.001  ‘**’  0.01  ‘*’  0.05  ‘.’  0.1  ‘ ’  1

Residual standard error: 3.534 on 98 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.6632,    Adjusted R-squared:  0.6597
F-statistic:   193 on 1 and 98 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

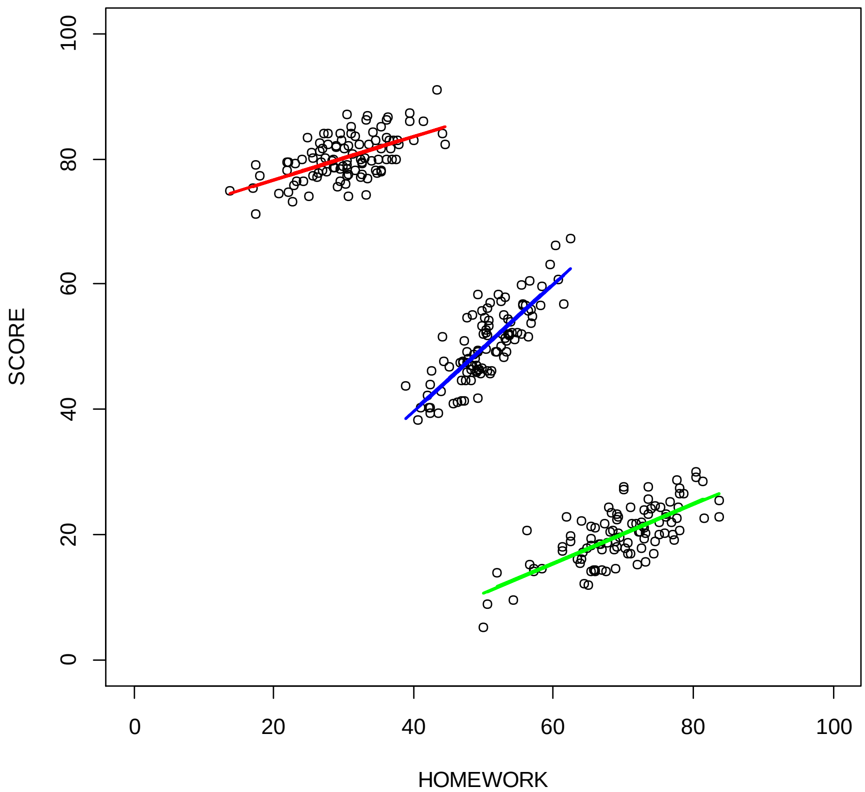
C クラス

```
Call:
lm(formula = SCORE ~ HOMEWORK, data = datC)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-5.9488 -2.5349 -0.0647  2.2788  7.3799

Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -12.91282    3.26115   -3.96 0.000142 ***
HOMEWORK      0.47319    0.04664   10.14  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0  ‘***’  0.001  ‘**’  0.01  ‘*’  0.05  ‘.’  0.1  ‘ ’  1

Residual standard error: 3.258 on 98 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5123,    Adjusted R-squared:  0.5073
F-statistic: 102.9 on 1 and 98 DF,  p-value: < 2.2e-16
```



以上から、クラスごとにデータを分割して分析すると、それぞれのクラスの HOMEWORK の係数はプラスになり、回帰直線の傾きは右肩上がりになることが確認できる。各クラスについて関心があればこのような分析でもよいが、クラス横断的にデータが利用できる以上、クラスによる HOMEWORK の効果の差と、クラスによる違いを取り除いた HOMEWORK の SCORE に対する効果を検討したい。そこで、データを分割するのではなく CLASS 変数をモデルに投入して分析してみる。

3. クラス要因をモデルに含めた回帰分析

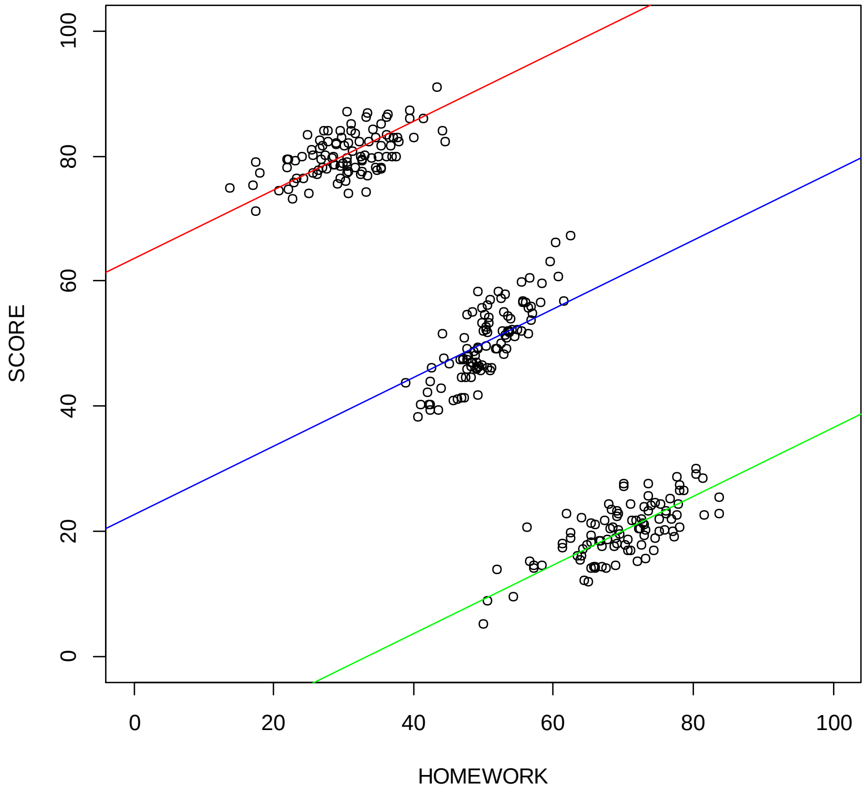
CLASS 変数はカテゴリカルデータなので、A クラスを参照としてダミーデータに変換してモデルに含め分析を行う。すなわち、クラスによって切片が異なるモデルで分析を行う。

```
Call:
lm(formula = SCORE ~ HOMEWORK + CLASS, data = dat)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-7.9367 -2.6565 -0.3133  2.6536 10.4577 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  63.6182     1.1059   57.52   <2e-16 ***
HOMEWORK      0.5480     0.0345   15.88   <2e-16 ***
CLASSB      -40.9175     0.8586  -47.65   <2e-16 ***
CLASSC      -81.7373     1.4460  -56.53   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.587 on 296 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9798,    Adjusted R-squared:  0.9796 
F-statistic:  4782 on 3 and 296 DF,  p-value: < 2.2e-16
```



全体の平均的な HOMEWORK の SCORE に対する効果は、HOMEWORK の係数＝傾きの値となる。すなわち、HOMEWORK が 1 単位増加すると SCORE は平均的に 0.5480 向上する。そして、それぞれのクラスは切片が異なっており、（Intercept）が A クラスの切片の推定値、（Intercept）に CLASSB の値を加えたものが B クラスの切片、同様に CLASSC を加えたものが C クラスの切片となる。

4. クラス要因を変量効果とするマルチレベルの回帰分析

先ほど、ダミー変数にして投入したクラス要因を、固定効果ではなく変量効果としたマルチレベルモデルによる分析を行ってみる。

```
Linear mixed model fit by REML t-tests use Satterthwaite approximations to degrees of
freedom [lmerMod]
Formula: SCORE ~ HOMEWORK + (1 | CLASS)
   Data: dat

REML criterion at convergence: 1640.9

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.21285 -0.73780 -0.08786  0.73718  2.91909

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 CLASS    (Intercept) 1668.74  40.850
 Residual               12.87   3.587
Number of obs: 300, groups:  CLASS, 3

Fixed effects:
             Estimate Std. Error        df t value Pr(>|t|)
(Intercept)  22.79055   23.64902   2.48000   0.964     0.42
HOMEWORK      0.54688    0.03449 296.62000  15.856   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0  '***'  0.001  '**'  0.01  '*'  0.05  '.'  0.1  ' '  1

Correlation of Fixed Effects:
         (Intr)
HOMEWORK -0.073
```

まず着目するのは、Fixed effects（固定効果）の HOMEWORK の係数である。この係数は、若干異なっているが、CLASS をダミー変数にしてモデルに投入した回帰分析で推定された値と一致している。ここでは、CLASS を変量効果として推定しているが、そこでは CLASS の分散および標準偏差が推定されている。標準偏差を見ると概ね 41 程度となっているが、これを固定効果の（Intercept）の値を平均として、その前後に 41 の標準偏差を考えてみると、だいたい先に推定された切片の値と一致することがわかる。

これは何を意味するか？マルチレベルモデルは、特に特別なことをしているわけではない。クラスごとの切片を、固定効果の水準として推定するか、それらを変量効果として推定するかの違いだけで、いずれもクラス横断的な（クラスの影響を取り除いた）HOMEWORK の SCORE に対する平均的な効果（Fixed effects の HOMEWORK の係数）を検討しているに過ぎない。では、なぜマルチレベル分析が必要なのだろうか。この点は、いろいろな考え方があるが、1 つの見方として変数として統制する必要はあるが、その変数自体に関心がない場合で、水準が多数になる場合にモデルを倹約的に構築することではないか、というのが私の理解である。

ここでは 3 クラスしか想定していないので、ダミー変数にして投入してもたいして問題にならないが、これが 100 クラスあったとするとモデルに投入するのは非現実的である。そこで、このダミー変数の部分、すなわちクラスごとの切片の違いは、正規分布からランダムに生じたものだと仮定して、その分散（標準偏差）だけを推定することにしたものが、マルチレベルだと考えることができる。裏を返せば、クラスの違いによる HOMEWORK の SCORE に対する効果の違いに関心を持つとすれば、マルチレベルモデルよりもダミー変数にして通常の回帰分析を行う方が妥当かもしれない。ポイントは、統制したい変数の水準数と、その水準自体の違いが何か意味がありそこに興味があるか、ランダムに生じた差だと考えて分析するかの違いというところだろうか。

```
Analysis of Variance Table

Response: SCORE
           Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
HOMEWORK    1 143464  143464 11148.6 < 2.2e-16 ***
CLASS       2  41159   20580  1599.3 < 2.2e-16 ***
Residuals 296   3809      13
```

ちなみに、上に示す通常の回帰分析における分散分析表の誤差の平均平方（Residuals の Mean Sq）は、マルチレベルモデルで推定された誤差の分散（Randam effects にある Residual の Variance）は値が一致している（分散分析表は整数に丸められている）。つまり、通常の重回帰分析でもマルチレベルモデルでも、モデルによって説明される分散の大きさは等しいということであり、分析結果もほぼ一致することから、本質的なところで両者は同じ構造だと考えることができる。異なるのは、変数の扱いかたと推定方法ということだろうか。

5. 傾きの違いも検討してみる（通常の重回帰分析）

少し話は戻って、2 節ではクラスごとにデータを分割して、それぞれについて回帰分析を行った。そこでは、クラスによって切片だけではなく傾きもそれなりに異なっていることがうかがえる。モデルにダミー変数だけを投入した場合、クラスごとに切片は異なるが傾きは共通となる。そのため、クラスに関わらず全体としての平均的な HOMEWORK の効果を考えることができる。しかし、クラスによって HOMEWORK の SCORE に対する効果の大きさが異なるならば、その点についても検討する必要があるかもしれない。そこで、切片とともに傾きもクラスごとに異なるモデルを検討する。これは、HOMEWORK と CLASS の交互作用を考えればよい。

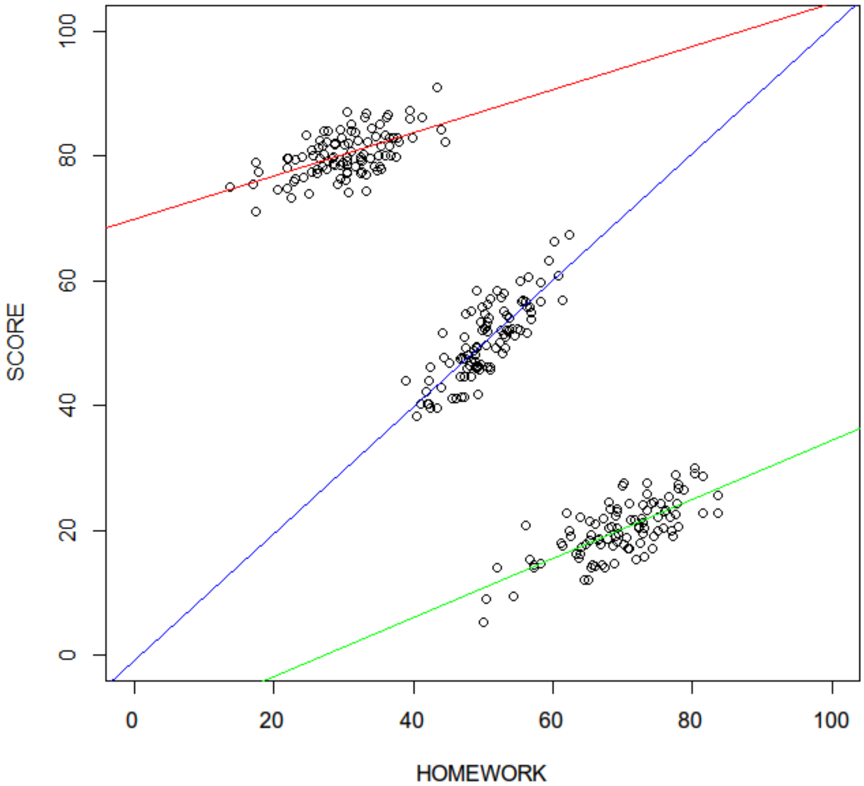
```
Call:
lm(formula = SCORE ~ HOMEWORK + CLASS + HOMEWORK:CLASS, data = dat)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-7.3808 -2.4805 -0.2423  2.3024  9.2949

Coefficients:
                 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)      69.74699    1.67985  41.520  < 2e-16 ***
HOMEWORK          0.34591    0.05435   6.365 7.48e-10 ***
CLASSB          -70.63089    3.80670 -18.554  < 2e-16 ***
CLASSC          -82.65981    3.66969 -22.525  < 2e-16 ***
HOMEWORK:CLASSB   0.67005    0.08663   7.734 1.67e-13 ***
HOMEWORK:CLASSC   0.12728    0.07163   1.777   0.0766 .
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 3.26 on 294 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9834,    Adjusted R-squared:  0.9831
F-statistic:  3488 on 5 and 294 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

HOMEWORK と CLASS の交互作用を投入すると、CLASS ごとに傾きが自由に推定できるようになる。切片については、先ほどと同様に（Intercept）＝基準となる A クラスの切片に、CLASSB、CLASSC の係数を加えればよい。傾きも同様に、HOMEWORK が基準である A クラスの傾きを示すので、この係数に HOMEWORK:CLASSB および HOMEWORK:CLASSC の値をそれぞれ加えれば、クラス B、クラス C の傾きが検討できる。



各クラスの回帰式を組み立ててみると、

A クラス　　SCORE = 69.747 + 0.346・HOMEWORK

B クラス　　SCORE = -0.884 + 1.0160・HOMEWORK

C クラス　　SCORE = -12.913 + 0.473・HOMEWORK

となる。これらの結果は、データを分割してクラス別に分析した結果とほぼ一致することがわかる。データを分けた場合と、ここで行ったようにまとめて分析するのとでは何が異なるのだろうか。それは、切片や傾きの違いを検討できる点だろう。回帰分析表の CLASSB、CLASSC の係数について検定を行うと（係数=0 の帰無仮説を検討）、A クラスに対して B クラス、C クラスの切片が異なるかどうかを調べることができる。また、HOMEWORK と CLASS の交互作用も同様に、A クラスの HOMEWORK の SCORE に対する効果の大きさに対して、B クラスおよび C クラスの効果が異なっているかを調べることができる。ここでは、有意水準を 5%とすれば、A クラスよりも B クラスの方が有意に HOMEWORK の効果は大きいが、C クラスについては傾きが異なるとはいえないようである。

5. 傾きの違いも検討してみる（マルチレベルモデル）

最後に、マルチレベルモデルでもクラスによって切片だけ（ランダム・インターセプト）ではなく、傾きも異なる（ランダム・スロープ）場合の分析を行ってみる。

```
Linear mixed model fit by REML t-tests use Satterthwaite approximations to degrees of
freedom [lmerMod]
Formula: SCORE ~ HOMEWORK + (1 + HOMEWORK | CLASS)
   Data: dat

REML criterion at convergence: 1591.3

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.26965 -0.76000 -0.06809  0.70975  2.84605

Random effects:
 Groups   Name        Variance  Std.Dev. Corr
 CLASS    (Intercept) 1987.1366 44.58
          HOMEWORK       0.1225  0.35    -0.53
 Residual               10.6247  3.26
Number of obs: 300, groups:  CLASS, 3

Fixed effects:
            Estimate Std. Error      df t value Pr(>|t|)
(Intercept)  18.8128    25.7907  2.0032   0.729   0.5415
HOMEWORK      0.6087     0.2047  1.9772   2.973   0.0983 .
---
Signif. codes:  0  ‘***’  0.001  ‘**’  0.01  ‘*’  0.05  ‘.’  0.1  ‘ ’  1

Correlation of Fixed Effects:
         (Intr)
HOMEWORK -0.536
```

CLASS を変量効果としたので、CLASS による切片の違いや傾きの違いは、その分散だけが推定され通常の回帰モデルのように各クラス（確率変数と考えるので水準ではないと思うが便宜的に）の切片や係数を求めることはできない（と思う）。このとき、固定効果（Fixed effects）は、クラスによる切片および係数のばらつきの平均が示されていることになるだろう。したがって、クラスの違いによって左右される HOMEWORK の SCORE に対する効果の増減を取り除いた、平均的な効果の大きさが示されていると考えられる。これは、3 節、4 節で行った分析と似ている。これらは「クラス間で傾きに差がない」という比較的強い仮定をおいて推定したものであるが、ここでは傾きもクラスごとに自由に推定しており、よりデータへの当てはまりがよくなっている（別途 AIC などで検討する必要があると思うが)。傾きを固定して推定するよりも、HOMEWORK の効果はやや大きいようである。

前節に示した通常の重回帰分析の CLASS 要因を変量効果にしただけであるが、通常の重回帰分析では各水準の切片と係数の推定値について検討できるが、CLASS 要因を統制した全体の平均的な HOMEWORK の効果を検討することが難しい（方法はありそうだが)。他方で、マルチレベルモデルでは、水準間の差を検討することはできないが、HOMEWORK の平均的な効果を検討することができる（と思う)。ちなみに、2 節のデータを分割して分析した場合の各クラスの傾きの平均値、前節で分析した各クラスの傾きの平均値を計算してみると、概ねここでのマルチレベルの固定効果の HOMEWORK の係数と一致している。

最後に、Randam effects の Corr についても考えておこう。これは、切片と傾きとの相関係数である。この値は、切片が大きくなるほど傾きが強くなるといった、両者の関係が示されている。3 クラス程度では検討する意味はあまりないが、水準数が多数になった場合を考えれば、変量効果の内容を吟味する際に切片と傾きの関係に関する情報が役立つことがあるかもしれない。

6. グループレベルの変数の検討

ここまでは、CLASS の違いによって説明される分散については、全て変量効果の項に押し込んで、HOMEWORK が SCORE に及ぼす影響を検討してきた。これは、検討対象の変数以外の変数で説明される部分を誤差項に集約することとほとんど変わらないように思える。これは、マルチレベルモデルにおいて誤差項が変量効果として推定されていることからも、誤差項がそのように扱われていることがわかる。通常の重回帰分析では、決定係数 R^2 は目的変数の分散のうち、投入した説明変数によってどの程度の割合が説明されているのかを示す指標となる。したがって $1-R^2$ の値は、誤差項によって説明される割合であり、それはモデルでは考慮されていない何らかの変数によって説明される部分である。

ここまでの分析例では、CLASS の違いが HOMEWORK と SCORE との関係に影響する部分を取り除くことを主眼としており、CLASS の違いによって切片や傾きがどの程度ばらつくのか（分散があるのか）のみを検討した。では、単にクラスが違うから HOMEWORK の SCORE に対する効果が異なるということが明らかになったならば、クラスによるどのような違いが HOMEWORK と SCORE の関係に影響を及ぼしているのか、という点に疑問が生まれるのは自然な事であろう。そこで、CLASS レベルの変数を投入してみよう。CLASS レベルの変数は、CLASS による違いの内容を具体的に示すもので、教員のスキルとか教室環境とか仲の良さとか、いろいろな要因があるが、ここでは教員のスキル（TEACHER）という変数を導入する。この値は、CLASS ごとに共通の値であるため、データとしては以下のように同じ CLASS の生徒で共通の値となる。

HOMEWORK	SCORE	CLASS	TEACHER
26.31	77.74	A	61
34.79	77.64	A	61
29.50	84.13	A	61
22.04	79.52	A	61
30.51	78.44	A	61
....			
43.50	39.53	B	52
52.91	55.17	B	52
46.19	41.19	B	52
49.21	41.73	B	52
45.17	46.83	B	52
....			
73.59	25.78	C	48
72.23	20.48	C	48
74.02	24.21	C	48
58.26	14.69	C	48
75.13	22.07	C	48
....			

```
Linear mixed model fit by REML t-tests use Satterthwaite approximations to
  degrees of freedom [lmerMod]
Formula: SCORE ~ HOMEWORK + TEACHER + (1 | CLASS)
   Data: dat

REML criterion at convergence: 1632.8

Scaled residuals:
     Min       1Q   Median       3Q      Max
-2.21036 -0.74011 -0.08699  0.73737  2.91936

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 CLASS    (Intercept) 155.84   12.483
 Residual              12.87    3.587
Number of obs: 300, groups:  CLASS, 3

Fixed effects:
             Estimate Std. Error        df t value Pr(>|t|)
(Intercept) -298.7773    71.8898    1.0600  -4.156     0.14
HOMEWORK       0.5475     0.0345  296.1700  15.871   <2e-16 ***
TEACHER        5.9914     1.3300    1.0500   4.505     0.13
---
Signif. codes:  0  ‘***’  0.001  ‘**’  0.01  ‘*’  0.05  ‘.’  0.1  ‘ ’  1

Correlation of Fixed Effects:
         (Intr) HOMEWO
HOMEWORK -0.098
TEACHER  -0.995  0.075
```

話を単純にするために、ここでは切片のみ変量効果とするランダムインターセプトモデルで考えてみる。CLASS が異なることで差が生じる要因として、教員のスキルの影響があることは容易に想像できる。グループレベルの変数 TEACHER を固定効果としてモデルに投入するということは、これまで CLASS の変量効果として説明していた分散を、明確に検討対象とする要因として固定効果に切り出したと考えることができるだろう。つまり、CLASS の違いによって SCORE が異なっていたが、それを説明する要因として教員のスキルを明示的に検討するということである。

分析結果を見ると、適当に作ったデータなので TECHER の効果は有意ではないが（CLASS が 3 つしかないというのもあるだろう）、注目すべきは変量効果（Random effects）の CLASS の分散の大きさだろう。Std. Dev の値を 4 節の分析結果と比較してみると、40.850 だった値が 12.483 と減少している。ここでは、意図的に CLASS の平均 SCORE が高いほど教員のスキルが高くなるように値を与えている。したがって、教員のスキルによって切片の違いが生まれるデータである。CLASS の違いが説明していた分散のうち、教員のスキルの違いによって説明される部分が固定効果で検討されるため、変量効果の CLASS が説明していた分散が減少している。もし教員のスキルが何も影響がないならば、CLASS の推定値は変化しないだろう。また、教員のスキルによって完全に CLASS の違いが説明できるならば、CLASS の推定値は 0 となるはずである。ここでは、教員のスキルを検討してもなお CLASS の違いによって説明される部分が残っているということである。つまり、グループレベルの変数を投入したときに生じる変量効果として投入したグループ変数の推定値の変化から、グループレベルの変数の効果を検討することができるといえる。

SPSS では、変量効果についての検定が行なわれるが、R では出力されない。この辺りは、方法論的に考え方が色いろあるようである。また、グループレベルの変数を投入した際の変量効果の変化の検定なども、モデルを比較するうえでは必要かもしれない。こうした点は今後の課題であるが、いずれにしても、どの変数が目的変数の分散のどのくらいの部分を説明しているのかを検討していくことが分析のポイントであり、この点はマルチレベルモデルでも一般的な線形モデルでも変わりはないように思う。

7. ICC（Intra Class Correlation：級内相関）

マルチレベルモデルで検討すべきかどうかを考える際に、ICC（級内相関）の値が参照される。これは、グループレベルの変数によって目的変数の分散がどの程度説明されるのかを検討する。ところで、（重）回帰分析では目的変数の分散を、説明変数と誤差によって説明する。説明変数によって説明される部分以外は、すべて誤差となる。したがって、モデルの当てはまり具合は、100%のうちどの程度の分散が説明変数によって説明されるのかを指標として検討することができ、決定係数 R^2 がその割合を示している。

マルチレベルモデルも基本的には回帰分析であるため、固定効果にしても変量効果にしても、モデル全体で目的変数のすべての分散を説明する。具体的には、固定効果＋変量効果（グループレベルの変数＋誤差）となる。しかし、変量効果を導入すると R^2 は計算できなくなるようで（このあたりは数学的理解が必要）、変量効果としたグループレベルの変数の効果の大きさを単純に説明される分散の割合だけで検討することができない。そこで ICC に注目する。

マルチレベルモデル（混合モデル）では、固定効果と変量効果でモデルを構成するが、ここで出発点として変量効果としてグループレベルの変数のみをもつ Null モデルを考える。

```
Linear mixed model fit by REML t-tests use Satterthwaite approximations to
  degrees of freedom [lmerMod]
Formula: SCORE ~ 1 + (1 | CLASS)
   Data: dat

REML criterion at convergence: 1817.9

Scaled residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-3.0375 -0.6208 -0.0586  0.6126  3.4969

Random effects:
 Groups   Name        Variance Std.Dev.
 CLASS    (Intercept) 906.64   30.110
 Residual              23.76    4.874
Number of obs: 300, groups:  CLASS, 3

Fixed effects:
            Estimate Std. Error     df t value Pr(>|t|)
(Intercept)   50.189     17.387  2.042   2.887   0.0996 .
```

これは、CLASS の変量効果のみで SCORE を説明するモデルである。ここで、Random effects の Variance に注目すると、CLASS で説明される分散が 906.64 でそれ以外の要因（＝誤差）で説明される分散が 23.76 である。モデルには他に説明要因はないので、906.64+23.76=930.4 がモデル全体で説明される分散の大きさである。そして、これに対する CLASS で説明される分散の割合は 906.64÷930.4=0.974 となり、これが CLASS の ICC となる。ここから、CLASS 要因によって説明される部分がかなり大きいことがわかる。したがって、マルチレベルモデルで検討すべきだということになる。

いくつかの分析例を参照すると、Null モデルに固定効果を逐次投入して変量効果の変化を検討している。このとき、ICC を検討することにはどのような意味があるだろうか？固定効果を導入すると、グループレベルの変数＋固定効果＋誤差で分散の全体を説明することになる。この場合、ICC はグループレベルの変数と誤差のみで計算され、固定効果で説明される分散の量は考慮されないように思える。先にも示したように、固定効果を導入するとグループレベルの変数で説明される部分が変化するので ICC も変化するが、固定効果を考慮しないのであまり意味はないように思う。固定効果をモデルに含めたことで、グループレベルの変数と誤差の分散がどのように変化するのかを観察しながら分析するのが良いだろう。

まとめ

今回は、マルチレベルモデルが本質的には重回帰分析と同じだという視点から、両者による分析を比較してみた。両者の分析結果はかなり似ており、実質的には推定方法の違いだけで（ここが重要なのだろうが)、解釈の仕方はほぼ同じだと思われる。マルチレベルの 1 つの利点は、やはり多数の水準を持つ変数の統制が可能になる点であろう。マルチレベルモデルが、混合モデルとか変量効果モデルなどいろいろな名称で呼ばれるのは、この方法がいろいろな場面で有用であるためである。したがって、様々な例を挙げることができると思うが、例えば個人について継時的にデータをとるような場合、個人について各時点のデータが入れ子になったマルチレベルな構造になる。このような場合が、典型的な利用場面の 1 つだろう。継時的に観察した個人のデータは、個人を単位として相互に関係があることが容易に想像できる。そのため個人の要因を統制してやる（個人ごとにまとめて分析する）必要がある。しかし、観察対象の個人が 100 人いれば 99 個のダミーデータを投入したモデルで分析することになり問題が多い。このような場面において個人ごとに異なる切片や傾きの違いを、確率変数として取り扱うことでモデルにうまく組み入れて分析できることが、この分析方法のポイントだろう。

こうした本質的な特徴をとらえておけば、どの要因を変量効果とするのか、どのような場合に有効なのかを判断することができるようになるようにも思う。十分に消化できていない点も多いが、現時点でのマルチレベルモデルに対する私の理解は以上である。